

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Факультет математики і інформатики

Кафедра прикладної математики

Кваліфікаційна робота

магістра

(освітньо-кваліфікаційний рівень)

на тему Математичне моделювання динаміки пандемії
covid-19

Виконав: студентка групи МП61
II курсу (другий магістерський рівень),
спеціальності 113 Прикладна математика
(шифр і назва напрямку підготовки, спеціальності)
Прикладна математика
(освітньо-професійна програма)

Костецька В. В.
(прізвище та ініціали)

Керівник Кізілова Н. М.
(прізвище та ініціали)

Рецензент Півень О.Л.
(прізвище та ініціали)

Костецька В.В. Математичне моделювання динаміки пандемії covid-19

В роботі було зроблено огляд різних математичних моделей динаміки розповсюдження covid-19. Розглянуто метод диференціального перетворення та застосовано його для пошуку розв'язків моделі SEIR. Проведено аналіз чутливості моделі відносно зміни її параметрів, а також моделювання перебігу пандемії.

Kostetska V.V. Mathematical modelling of the dynamics of covid-19 pandemic

This work reviews different mathematical models of the dynamics of covid-19 spread. Differential Transformation Method was discussed and applied for obtaining solutions of the SEIR model. A sensitivity analysis of variables was carried out, as well as the modelling of pandemic's dynamic.

ЗМІСТ

Вступ	4
Розділ 1. Прикладні задачі аналізу динаміки розповсюдження пандемії covid-19	5
1.1. Статистичний аналіз даних вимірювань	5
1.2. Огляд моделей математичної епідеміології	10
Розділ 2. Постановка задачі.....	15
2.1. Аналіз стаціонарних точок моделей SIR і SEIR.....	15
2.2. Метод диференціальних перетворювань	18
Розділ 3. Результати розрахунків і їх обговорення.....	22
4. Висновки	30
5. Література.....	31
6. Додатки.....	33

ВСТУП

Пандемія covid-19 розпочалася у 2019 році. Напочатку епідемії вірус неконтрольовано розповсюджувався через брак знань про його природу, а медичні заклади не були готові до такого сплеску хворих. У кожній країні динаміка протікання пандемії своя, і на це впливає безліч причин. Тому завданням математиків стало використання математичних моделей для розуміння поведінки вірусу.

Актуальність роботи полягає в тому, що станом на листопад 2022 року covid-19 охопив 228 країн світу, в яких постійно фіксують нові випадки захворюваності. Це означає, що пандемія триває, і важливе прогнозування появи цих спалахів, розуміння які параметри-чинники впливають на динаміку її протікання, а також які математичні моделі є найбільш адекватними для швидких і достатньо точних розрахунків динаміки розповсюдження захворювання.

Метою роботи є огляд різних моделей математичної епідеміології, використання чисельного методу диференціальних перетворювань для розв'язання задач математичної епідеміології, аналіз і обговорення отриманих результатів з метою подальшого застосування для передбачення подальшого розповсюдження пандемії і боротьби з нею.

Розділ 1. Прикладні задачі аналізу динаміки розповсюдження пандемії covid-19

1.1. Статистичний аналіз даних вимірювань

Перші випадки захворювання на ковід-19 було зафіксовано ще у грудні 2019 року в м. Ухань, Китай. Вже згодом вірус розповсюдився по іншим країнам світу. 11 березня 2020 року Всесвітня організація охорони здоров'я (ВООЗ) визнала цей спалах пандемією.

Станом на листопад 2022 року зафіксовано більше 200 млн. випадків захворювання на ковід, а також більше 2 млн. смертей.

Країни світу по-різному реагували на нову загрозу, тому проводили свою політику стримування розповсюдження інфекції. Через це динаміка протікання пандемії у кожній країні відрізняється.

Більшість держав зійшлися у думці про необхідність обмеження соціальних контактів між громадянами та обмежили можливість контактування населення (вводилися локдауни із режимом самоізоляції, заборонаю збиратися у громадських місцях, правилами соціального дистанціювання, закриттям кордонів, тощо), але Швеція напочатку відрізнялася тим, що не вводила жорстких обмежень всередині країни з метою набуття так званого колективного імунітету. Громадянам було дозволено відвідувати громадські місця, заклади освіти не закривалися на карантин, тощо. Проте був заборонений в'їзд іноземних громадян в країну. Однак така стратегія, як видно на Рис.1., не призвела до бажаного результату.

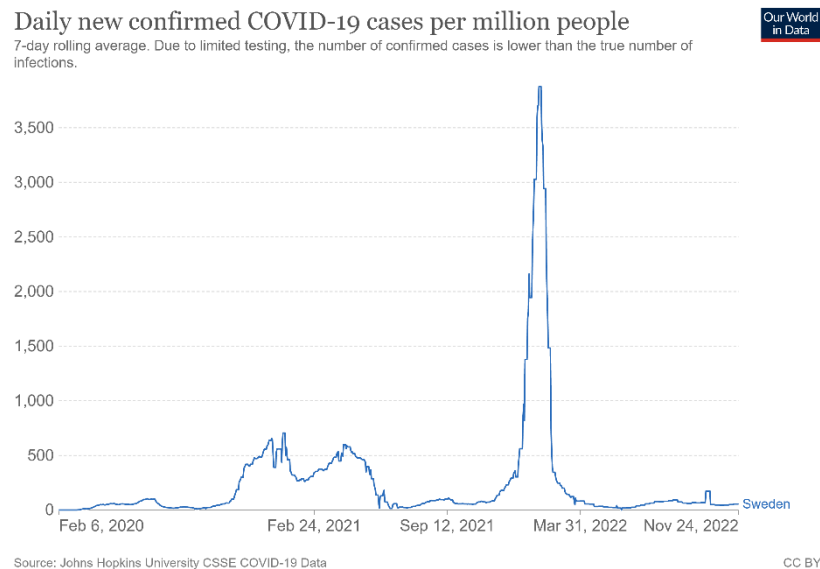


Рис.1. Динаміка захворювання на COVID-19 в Швеції (щоденна кількість нових підтверджених випадків на 1 млн.населення).

Ізраїль став країною, яка першою ввела обов'язкову вакцинацію. Станом на січень 2021 року ця країна стала найбільш вакцинованою країною світу на душу населення. Напочатку це допомогло стримати швидкість розповсюдження вірусу, однак видно, що у довгостроковій перспективі це не запобігло новим спалахам (Рис.2).

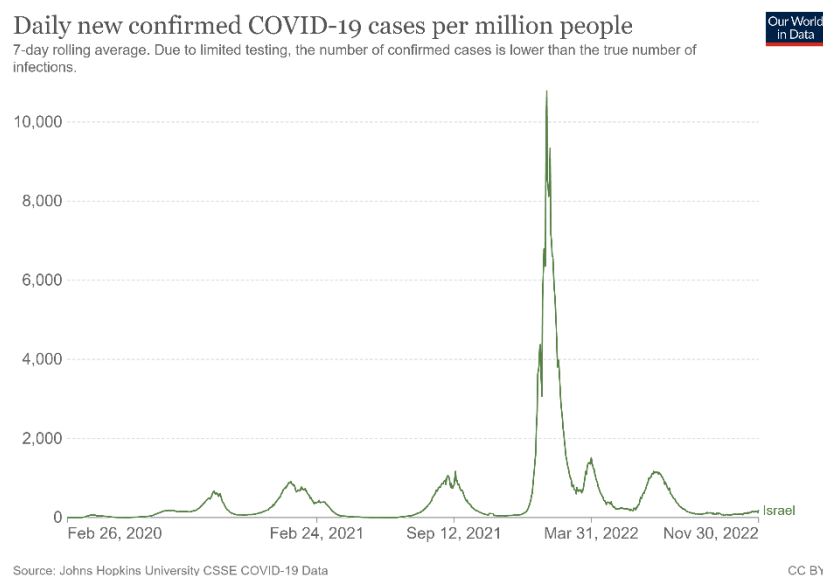


Рис.2. Динаміка захворювання на COVID-19 в Ізраїлі (щоденна кількість нових підтверджених випадків на 1 млн.населення).

У Південній Кореї карантинні обмеження були доволі жорсткими та тривалими: в той час як більшість країн Європи з часом почала знімати деякі обмеження, тут цього не поспішали робити. Як видно на Рис.3., поки тривали жорсткі обмеження, поширення вірусу вдавалося стримувати.

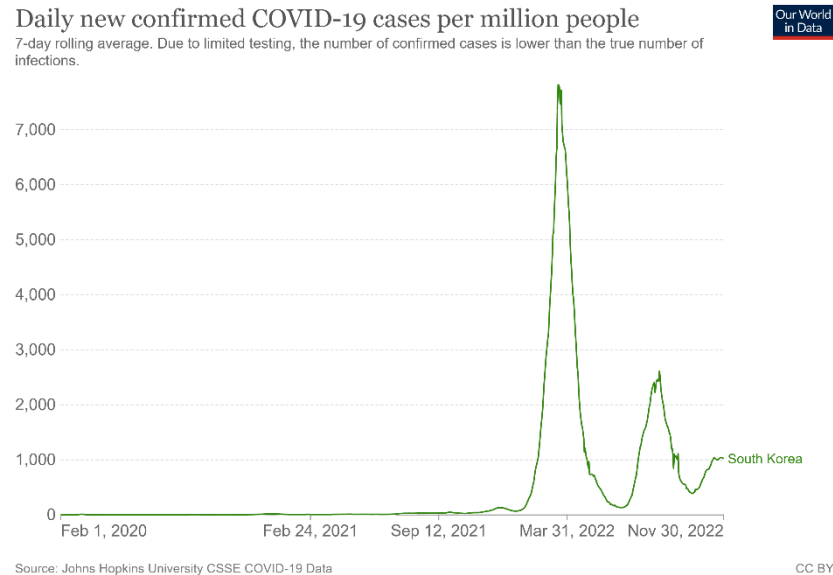
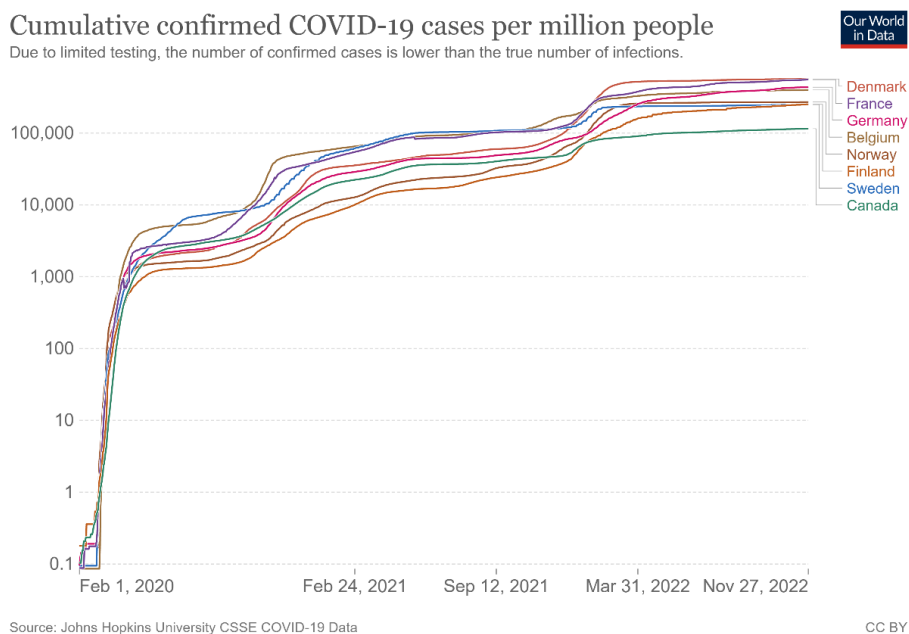
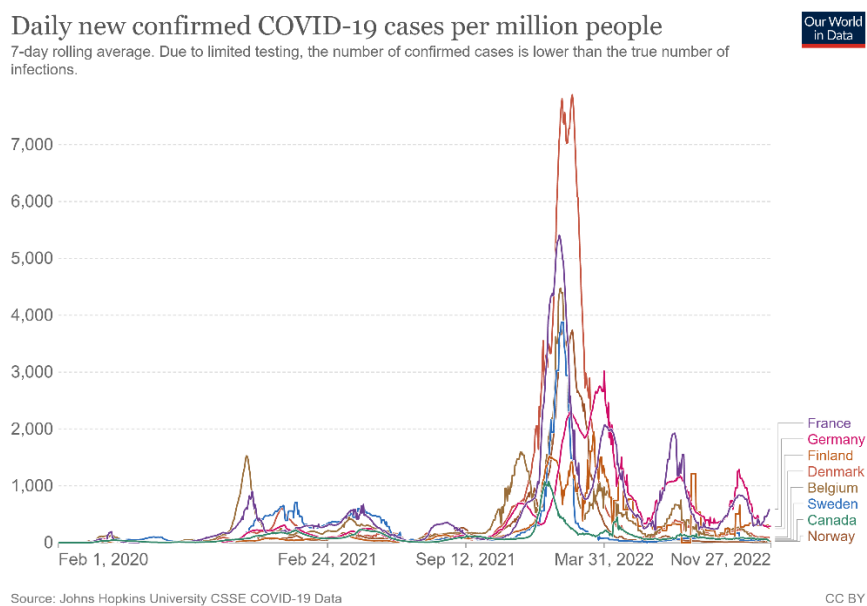


Рис.3. Динаміка захворювання на COVID-19 в Південній Кореї (щоденна кількість нових підтверджених випадків на 1 млн. населення).

Звісно, ця статистика не означає, що заходи, які було впроваджено, зовсім не ефективні, адже на поширення covid-19 впливає безліч факторів, які потребують дослідження.



a



б

Рис.4. Динаміка захворювання на COVID-19 в деяких країнах (число випадків на 1 млн.населення: а - сукупна кількість підтверджених випадків; б - щоденна кількість нових підтверджених випадків.

Статистика COVID-19 по різним країнам (Рис.4.) дає змогу зробити висновки про наявність хвильової динаміки. Ця динаміка є різною в різних країнах, тому важливо передбачити появу піку та величину його амплітуди. Для цього використовують математичні моделі.

За останні три роки було опубліковано багато робіт, в яких розглядалися різні математичні моделі та досліджувалася динаміка пандемії. Наприклад, в статті [1] вдалося показати різну динаміку захворюваності на прикладі України, Іспанії, Норвегії та Індонезії. В кожному з випадків криві, які наближують розв'язок, затухають по експоненті, що є типовим для математичних моделей. Але швидкість цього затухання варіюється в залежності від країни. Це результат того, що в різних країнах параметри варіюються.

Слід зауважити, що коронавірус має особливість швидко мутувати, і деякі з його штамів є більше заразними, ніж інші, що може призводити до нових спалахів. Передбачення впливу тих чи інших чинників або заходів щодо його стримування теж допомагають зробити математичні моделі.

1.2. Огляд моделей математичної епідеміології

Різноманіття моделей математичної епідеміології дуже велике. Однією з простих та часто використовуваних у епідеміології моделей є модель епідемії SIR. Вона передбачає те, що вся популяція розділена на 3 групи (сприйнятливі – s , інфіковані – i та одужалі – r), між якими відбуваються переходи. Рівняння моделі мають вигляд

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= -c\beta s \frac{i}{n} \\ \frac{di}{dt} &= c\beta s \frac{i}{n} - \gamma i \\ \frac{dr}{dt} &= \gamma i\end{aligned}\tag{1.1}$$

де параметр c відповідає за кількість контактів за період часу, β – вірогідність передачі захворювання за контакт, γ – швидкість одужування на душу населення.

Але для дослідження саме динаміки пандемії covid-19 така модель не дуже підходить, адже не враховує факт росту популяції, що важливо при довготривалих епідеміях.

З цієї причини розглянемо більш підходящу модель SIR, яка враховує природні зміни популяції (народжуваність і смертність). Рівняння цієї моделі мають вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= (\lambda - \alpha)s - \beta si + \delta r, \\ \frac{di}{dt} &= \beta si - \gamma i - \phi i, \\ \frac{dr}{dt} &= \gamma i - \delta r.\end{aligned}\tag{1.2}$$

де λ - швидкість зростання популяції, β - швидкість інфікування, ϕ - смертність від ковід, α - коефіцієнт природної смертності, γ і δ - швидкості одужання та ослаблення імунітету відповідно.

Базове репродукційне число \mathcal{R}_0 це швидкість розповсюдження епідемії, яке як епідеміологічна метрика використовується для оцінки трансмісивності інфекційних агентів. Воно вказує середню кількість осіб, яку може заразити хворий індивід у період своєї заразності. \mathcal{R}_0 – це оцінка контагіозності, яка залежить від людської поведінки та біологічного характеру патогенів. Воно не є мірою тяжкості інфекційного захворювання, як і швидкістю поширення збудника серед населення. \mathcal{R}_0 є похідною наступних змінних – тривалості заразності після того, як індивід заражається, ймовірності передачі інфекції за один контакт від інфікованої особи до сприйнятливої, і частоти контактів. \mathcal{R}_0 допомагає визначити ступінь імунізації, необхідної для набуття колективного імунітету [3]. \mathcal{R}_0 визначає динаміку епідемії. Якщо $\mathcal{R}_0 > 1$, то інфекція розповсюджується швидше, і чим більше це число, тим складніше контролювати епідемію. Натомість якщо $\mathcal{R}_0 < 1$, епідемія затухає, тому в розвинених країнах це число обчислюється кожного тижня по свіжим статистичним даним.

Для моделі (1.2) \mathcal{R}_0 обчислюється за формулою

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta\phi}{(\lambda - \alpha)(\gamma + \phi)} \quad (1.3)$$

Найрозповсюдженішою моделлю математичної епідеміології є модель SEIR (сприйнятливі – s, експоновані – e, інфіковані – i та одужалі – r). Тобто на відміну від моделі SIR, в цій моделі ми маємо додаткову групу індивідів e – тих, які ще не мають симптомів хвороби: після контакту з інфікованими (i), сприйнятливі (s) потрапляють до групи експонованих (e) та можуть стати носіями вірусу без симптомів хвороби, при цьому заражаючи оточуючих. З

часом частина цієї групи проявляє ознаки захворювання і потрапляє до групи і. Рівняння моделі мають вигляд

$$\begin{aligned}
 \frac{ds}{dt} &= \lambda - \beta si + \delta r - \mu s, \\
 \frac{de}{dt} &= \beta si - (\alpha + \mu)e, \\
 \frac{di}{dt} &= \alpha e - \left(\gamma + \frac{\varepsilon}{1 + bi} \right) i - (\phi + \mu)i, \\
 \frac{dr}{dt} &= \left(\gamma + \frac{\varepsilon}{1 + bi} \right) i - (\delta + \mu)r,
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

де λ - коефіцієнт народжуваності, β - швидкість інфікування, ϕ - смертність від ковіду, μ - коефіцієнт природної смертності, γ - швидкість одужання, δ - швидкість ослаблення імунітету, α - параметр, який залежить від інкубаційного періоду вірусу, ε - ефективність лікування в лікарні, b - коефіцієнт насичування лікарень хворими.

За наступною формулою можна обчислити базове репродукційне число для цієї моделі:

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{\alpha\beta\lambda}{\mu(\mu + \gamma + \phi + \varepsilon)(\alpha + \mu)}.
 \tag{1.5}$$

Модифікації моделей SIR та SEIR дозволяють отримувати нові моделі із додатковими групами індивідів. До того ж ускладнювати моделі можна не лише новими групами, але й новими параметрами, які дозволяють дослідити динаміку пандемії враховуючи додаткові фактори. Проте слід пам'ятати, що ускладнення моделі параметрами викликає потребу в їхньому визначенні, тому це треба розумно обмежувати.

Прикладом ускладнення моделі SEIR новими контактними групами є індонезійська модель [2]. Вона враховує безсимптомні випадки інфікування COVID-19. Тобто можливі випадки інфікування, коли про це невідомо. Задля уникнення такої ситуації ряд країн вводили експрес-тестування для

виявлення інфікованих осіб у безсимптомній групі. Тому, в даній моделі індивідів без симптомів поділяють на дві категорії: виявлених та невиявлених. У статті цю модель використано для прогнозування ефектів соціального дистанціювання на зупинку розповсюдження ковід-19, та для відстежування наслідків плану щодо поступового пом'якшення вказівок уряду Джакарти щодо соціального дистанціювання.

У цій моделі вся популяція поділяється на наступні 6 груп, в залежності від стану їхнього здоров'я:

1. Група сприйнятливих $s(t)$
2. Група експонованих $e(t)$
3. Інфіковані $i(t)$
4. Група безсимптомного невиявленого населення $a_u(t)$
5. Безсимптомні виявлені $a_d(t)$
6. Одужалі $r(t)$

Модель виражається наступною системою рівнянь:

$$\begin{aligned}
 \frac{ds}{dt} &= \lambda - \beta s(a_u + \xi_i i + \xi_a a_d) - \mu s + \delta r, \\
 \frac{de}{dt} &= \beta s(a_u + \xi_i i + \xi_a a_d) - \alpha e - \mu e, \\
 \frac{da_u}{dt} &= p \alpha e - \nu a_u - \gamma_0 a_u - \mu a_u, \\
 \frac{da_d}{dt} &= \nu a_u - \gamma_0 a_d - \eta a_d - \mu a_d, \\
 \frac{di}{dt} &= (1-p) \alpha e + \eta a_d - \left(\gamma_0 + \frac{\gamma_1}{1+bi} \right) i - \mu i - \phi i, \\
 \frac{dr}{dt} &= \gamma_0 (a_u + a_d) + \left(\gamma_0 + \frac{\gamma_1}{1+bi} \right) i - \mu r - \delta r,
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

де λ - коефіцієнт народжуваності, β - швидкість інфікування, ϕ - смертність від ковіду, μ - коефіцієнт природної смертності, γ_0 - швидкість одужання, δ -

швидкість ослаблення імунітету, α - тривалість інкубаційного періоду, ξ_i - зменшення швидкості інфікування β для групи інфікованих і завдяки ізоляції вдома, ξ_a - зменшення швидкості інфікування β для групи виявлених безсимптомних індивідів a_d завдяки ізоляції в лікарнях, p описує частку експонованих, які перейшли в групу безсимптомних, γ_1 - збільшення швидкості одужування завдяки лікуванню в лікарнях, η - коефіцієнт переходу виявлених безсимптомних індивідів a_d до групи інфікованих і, ν - зусилля, необхідні для раннього виявлення ковіду.

Базове репродукційне число для даної моделі обчислюється за формулою [2]

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{\beta\lambda\alpha[\xi_i(\eta\nu + (1-p)(\mu + \gamma_0)(\mu + \eta + \nu + \gamma_0) + \mu(\mu + \phi + \gamma_0 + \gamma_1)(\mu + \nu + \gamma_0)(\mu + \eta + \gamma_0)(\alpha + \mu) + p(\nu\xi_a + \eta + \mu + \gamma_0)(\mu + \phi + \gamma_0 + \gamma_1))]}{\mu(\mu + \phi + \gamma_0 + \gamma_1)(\mu + \nu + \gamma_0)(\mu + \eta + \gamma_0)(\alpha + \mu)} \quad (1.7)$$

Найбільший вплив на \mathfrak{R}_0 мають параметри, які впливають на трансмісивність, тобто, наприклад, швидкість інфікування β . Якщо цей параметр збільшується, то збільшується і \mathfrak{R}_0 , тобто відповідно поширюється хвороба.

Наприклад, для моделі (1.6) \mathfrak{R}_0 зростає при збільшенні параметрів λ , β , ξ_i , ξ_a , α , p , однак при збільшенні параметрів ϕ , μ , γ_0 , γ_1 , η , ν воно, навпаки, спадає [2].

Розділ 2. Постановка задачі

2.1. Аналіз стаціонарних точок моделей SIR і SEIR

Для моделі (1.2) маємо дві стаціонарні точки. Одна, очевидно, нульова, що відповідає відсутності епідемії:

$$\{s^0, i^0, r^0\} = \{0, 0, 0\} \quad (2.1.1)$$

Друга стаціонарна точка має вигляд

$$\{s^{00}, i^{00}, r^{00}\} = \left\{ \frac{\gamma + \phi}{\beta}, \frac{(\lambda - \alpha)(\gamma + \phi)}{\beta\phi}, \frac{\gamma(\lambda - \alpha)}{\delta(\gamma + \phi)} \right\} \quad (2.1.2)$$

і відповідає постійній кількості хворих та одужалих.

Аналогічно, модель SEIR також має дві стаціонарні точки. Якщо хворих серед населення немає, тобто $i = 0$, а тоді, відповідно, й $e = r = 0$, то очевидно, що $s = \frac{\lambda}{\alpha}$. В такому випадку на зміну популяції впливають тільки природні народжуваність і смертність.

Тобто точка перша стаціонарна точка –

$$\{s^0, e^0, i^0, r^0\} = \left\{ \frac{\lambda}{\alpha}, 0, 0, 0 \right\} \quad (2.1.3)$$

– точка відсутності епідемії. Друга точка, що відповідає постійній кількості експонованих, інфікованих та одужалих має вигляд:

$$\{s^{00}, e^{00}, i^{00}, r^{00}\} = \left\{ \frac{\delta(\gamma(1 + bi^{00}) + \varepsilon)i^{00} + \lambda(\mu + \delta)(1 + bi^{00})}{(\mu + \delta)(\beta i^{00} + \mu)}, \frac{\beta s^{00} i^{00}}{(\alpha + \mu)}, i^{00}, \frac{(\beta i^{00} + \mu)s^{00} - \lambda}{\delta} \right\} \quad (2.1.4)$$

У статті [2] наведено стаціонарні точки для індонезійської моделі. Їх також дві. Точка, яка відповідає відсутності епідемії має наступний вигляд:

$$\{s, e, i, a_u, a_d, r\} = \left\{ \frac{\lambda}{\mu}, 0, 0, 0, 0, 0 \right\} \quad (2.1.5)$$

$$\text{Точка ендемії } \{s^{00}, e^{00}, i^{00}, a_u^{00}, a_d^{00}, r^{00}\} \quad (2.1.6)$$

виражається наступним чином:

$s^{00}, e^{00}, a_u^{00}, a_d^{00}, r^{00}$ є функціями i^{00} :

$$s^{00} = \frac{k_5 k_6 (\mu + \alpha) k_2}{(1-p)(b \xi_i k_1 i^{00} + (\gamma_0 + \mu) k_4 \xi_i) + k_s} \quad (2.1.7)$$

$$e^{00} = \frac{i^{00} k_6 k_2 k_5}{(k_3(1-p) + \eta \nu)(i^{00} b + 1) \alpha} \quad (2.1.8)$$

$$a_u^{00} = \frac{k_2 p i^{00} \nu}{(k_3(1-p) + \eta \nu)(i^{00} b + 1)} \quad (2.1.9)$$

$$a_d^{00} = \frac{i^{00} p (\mu + \eta + \gamma_0) k_2}{(k_3(1-p) + \eta \nu)(i^{00} b + 1)} \quad (2.1.10)$$

$$r^{00} = \frac{k_3(i^{00} b p \phi \gamma_0 + (1-p)\mu \gamma_1 + p \phi \gamma_0) + b \gamma_0 k_5 k_6 i^{00} + k_r}{(\delta + \mu)(i^{00} b + 1)((1-p)(\gamma_0 + \mu) k_4 + \eta \nu)}, \quad (2.1.11),$$

де

$$k_1 = (\eta \nu + \eta \gamma_0 + \mu^2 + \mu \nu + 2\mu \gamma_0 + \nu \gamma_0 + \gamma_0^2) \quad (2.1.12)$$

$$k_2 = (i^{00} b \mu + i^{00} b \phi + i^{00} b \gamma_0 + \mu + \phi + \gamma_0 + \gamma_1) \quad (2.1.13)$$

$$k_3 = (\eta \mu + \eta \gamma_0 + \mu^2 + \mu \nu + 2\mu \gamma_0 + \nu \gamma_0 + p \gamma_0^2) \quad (2.1.14)$$

$$k_4 = (\gamma_0 + \mu + \nu + \eta) \quad (2.1.15)$$

$$k_5 = (\mu + \nu + \gamma_0) \quad (2.1.16)$$

$$k_6 = (\eta + \mu + \gamma_0) \quad (2.1.17)$$

$$k_7 = (\mu + \phi + \gamma_0) \quad (2.1.18)$$

$$k_s = p(\xi_a \nu + \eta + \mu + \gamma_0)k_2 + i^{00} b \eta \mu \xi_i + \eta \mu \xi_i \quad (2.1.19)$$

$$k_r = \eta \mu \gamma_0 + \eta \nu \gamma_1 + \eta \gamma_0^2 + \eta \gamma_0 \gamma_1 + \mu^2 \gamma_0 + \mu \nu \gamma_0 + \\ + 2\mu \gamma_0^2 + \nu \gamma_0^2 + \nu \gamma_0 \gamma_1 + \gamma_0^3 + \gamma_0^2 \gamma_1 + \nu \gamma_0 \quad (2.1.20)$$

В свою чергу i^{00} є додатними коренями наступного полінома третього порядку:

$$P(i) = a_3 i^3 + a_2 i^2 + a_1 i + a_0 = 0 \quad (2.1.21)$$

$$a_3 = \frac{b^2 \beta (1-p) \xi_i (\mu + \gamma_0) (\mu + \eta \nu + \gamma_0) + k_7 (\nu \xi_a + \eta + \mu + \gamma_0)}{(1-p) \alpha \delta \phi \gamma_0 k_4 + \mu k_7 k_6 k_5 (\alpha + \delta + \mu)} \quad (2.1.22)$$

$$a_0 = (\delta + \mu) \mu (\mu + \phi + \gamma_0 + \gamma_1) k_5 k_6 (\alpha + \mu) (1 - \mathfrak{R}_0) \quad (2.1.23)$$

На основі аналізу літератури робимо висновок, що модель SEIR є достатньо повною і відповідає динаміці 4 груп населення, тоді як модель SIR є занадто спрощеною і не відображує динаміку захворювань на ковід, тому що це захворювання має скриту фазу, коли експонована людина є носієм, може заразити інших, але сама не захворіє. Модель (1.6) є точнішою за SEIR, оскільки відображує динаміку хворих з легкою і важкою формами перебігу хвороби. Але до цієї моделі входять набагато більше параметрів, таких як наявність ліжкомісць, доступність апаратів штучної вентиляції, рівень медичного обслуговування у шпиталях, наявність потрібних ліків та ін., які важко оцінити кількісно завіт для однієї країни. Тому для подальшого дослідження і чисельних розрахунків була обрана модель SEIR.

2.2. Метод диференціальних перетворювань

Для розв'язання задачі в роботі був використаний метод диференціального перетворення (МДП). МДП - це чисельно-аналітичний метод розв'язування інтегральних рівнянь, звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь у часткових похідних, систем ЗДР. Цей метод дозволяє отримати розв'язок в термінах збіжних рядів із компонентами, які швидко обчислюються.

МДП вперше було запропоновано Чжоу [4] для розв'язування лінійних та нелінійних задач Коші при аналізі електричних кіл. Його також використовували для розв'язування диференціально-алгебраїчних рівнянь [5], рівняння Шредінгера [6], дробового диференціального рівняння [7], рівняння типу Лейна-Емдена [8] і т.д.

Для диференціальних рівнянь цей метод будує аналітичний розв'язок у формі полінома. Він відрізняється від традиційного методу розкладання в ряд Тейлора, тим, що не потребує обчислення похідних даних функцій. МДП – це ітеративна процедура отримання розв'язку диференціального рівняння у вигляді аналітичного ряду Тейлора.

Основна перевага цього методу полягає в тому, що його можна застосувати безпосередньо до лінійних та нелінійних ЗДР без потреби у лінеаризації, дискретизації або збуренні. Водночас цей метод здатний значно зменшити обсяг обчислювальної роботи, водночас забезпечуючи точний розв'язок у вигляді степеневого ряду зі швидкою збіжністю.

Опис методу.

Як відомо, якщо функція $u(x)$ є неперервно диференційованою, тоді вона може бути розкладена в ряд Тейлора в точці x_0

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^k u(x_0)}{dx^k} (x - x_0)^k \quad (2.2.1)$$

Диференціальним перетворенням порядку k функції $u(x)$, позначеним $U(k)$, визначається

$$U(k) = \frac{1}{k!} \frac{d^k u(x_0)}{dx^k} \quad (2.2.2)$$

Для того, щоб розв'язати задане ЗДР методом диференціального перетворення, ми застосовуємо диференціальні перетворення порядку k у рівнянні (2.2.2).

Зворотнє диференціальне перетворення визначається наступним чином

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)(x - x_0)^k \quad (2.2.3)$$

Перетворені функції відповідають простим математичним операціям, узагальненим в Таблиці 1.

Для зручності ми позначатимемо вихідні функції з малої літери, а перетворені – з великої.

Таблиця 1. *Фундаментальні математичні операції методу диференціального перетворення:*

Вихідна функція	Перетворена функція
$y(x) = g(x) \pm h(x)$	$Y(k) = G(k) \pm H(k)$
$y(x) = \alpha g(x)$	$Y(k) = \alpha G(k)$
$y(x) = \frac{dg(x)}{dx}$	$Y(k) = (k + 1)G(k + 1)$
$y(x) = \frac{d^2 g(x)}{dx^2}$	$Y(k) = (k + 1)(k + 2)G(k + 2)$

$y(x) = \frac{d^m g(x)}{dx^m}$	$Y(k) = (k+1)(k+2)\dots(k+m)G(k+m)$
$y(x) = 1$	$Y(k) = \delta(k)$
$y(x) = x$	$Y(k) = \delta(k-1)$
$y(x) = x^m$	$Y(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$
$y(x) = g(x)h(x)$	$Y(k) = \sum_{m=0}^k H(m)G(k-m)$
$y(x) = e^{\lambda x}$	$Y(k) = \frac{\lambda^k}{k!}$
$y(x) = (1+x)^m$	$Y(k) = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}$

У застосуваннях функція $u(x)$ виражається скінченним рядом, а рівняння (2.2.3) може бути усіченим і буде позначатися як $u_{(K)}^{DTM}$

$$u_{(K)}^{DTM}(x) = \sum_{k=0}^K U(k)(x-x_0)^k \quad (2.2.4)$$

Рівняння (2.2.4) передбачає, що $\sum_{k=K+1}^{\infty} U(k)(x-x_0)^k$ мізерно мала і, насправді, являє собою похибку.

Отже, метод диференціального перетворення зводить задачу пошуку розв'язку ЗДР до рекурентних рівнянь, які значно легко розв'язуються. Цей метод дозволяє без прямого розв'язування диференціального рівняння отримати наближений розв'язок із точністю, яка нас цікавить.

В роботі [9] метод диференціального перетворення був застосований для системи рівнянь моделі SIR (1.1) і отримані наступні рекурентні співвідношення:

$$\begin{aligned}
S(k+1) &= \frac{1}{k+1} \left[\frac{-c\beta}{n} \sum_{m=0}^k S(m)I(k-m) \right] \\
I(k+1) &= \frac{1}{k+1} \left[\frac{c\beta}{n} \sum_{m=0}^k S(m)I(k-m) - \gamma I(k) \right] \\
R(k+1) &= \frac{1}{k+1} [\gamma I(k)]
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Ми застосували метод диференціального перетворення до системи SEIR, і таким чином отримали наступні рекурентні рівняння:

$$\begin{aligned}
S(k+1) &= \frac{1}{k+1} \left[\lambda - \beta \sum_{m=0}^k S(m)I(k-m) + \delta R(k) - \alpha S(k) \right] \\
E(k+1) &= \frac{1}{k+1} \left[\beta \sum_{m=0}^k S(m)I(k-m) - (\alpha + \psi)E(k) \right] \\
I(k+1) &= \frac{1}{k+1} [\psi E(k) - \gamma I(k) - (\alpha + \phi)I(k)] \\
R(k+1) &= \frac{1}{k+1} [\gamma I(k) - (\alpha + \delta)R(k)]
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Для дослідження розповсюдження чергової хвилі епідемії ковід-19 у будь-якій країні або регіоні треба задати початкові значення змінних і коефіцієнти моделі.

Розділ 3. Результати розрахунків і їх обговорення

З метою валідації чисельного методу для проведення конкретних розрахунків за рекурентними співвідношеннями (2.2.6) були використані значення параметрів системи, які наведені у статті [2] для міста Джакарта, Індонезія:

Таблиця 2. Значення параметрів для системи

Параметр	Значення
β	$1.44 \cdot 10^{-7}$
ψ	0.25
γ	0.27
ϕ	0.06
δ	1 / 90
λ	$10467629 / (65 \cdot 365)$
α	$1 / (65 \cdot 365)$

У Додатку А наведено код програми, написаний у Python, з виконанням якої було обчислено наступні значення:

$$\begin{aligned}
 S(1) &= -62199.7955, S(2) = -803.597, S(3) = 1098.365, S(4) = -40.925... \\
 E(1) &= -60221.0748, E(2) = 8992.022, E(3) = -1689.3798, E(4) = 253.834... \\
 I(1) &= 25987.355, I(2) = -11816.095, I(3) = 2049.2717, I(4) = -274.6727... \\
 R(1) &= 78769.348, R(2) = 3069.0254, R(3) = -1074.86, R(4) = 141.32...
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Скориставшись формулою (2.2.3), отримаємо розв'язок у вигляді степеневого ряду:

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \sum_{m=0}^k S(k)t^k = 1500000 - 62199.7955t - 803.597t^2 + 1098.365t^3 - 40.925t^4 + \dots \\
 e(t) &= \sum_{m=0}^k E(k)t^k = 500000 - 60221.0748t + 8992.022t^2 - 1689.3798t^3 + 253.834t^4 + \dots \\
 i(t) &= \sum_{m=0}^k I(k)t^k = 300000 + 25987.355t - 11816.0956t^2 + 2049.2717t^3 - 274.6727t^4 + \dots \\
 r(t) &= \sum_{m=0}^k R(k)t^k = 200000 + 78769.348t + 3069.0254t^2 - 1074.86t^3 + 141.32t^4 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

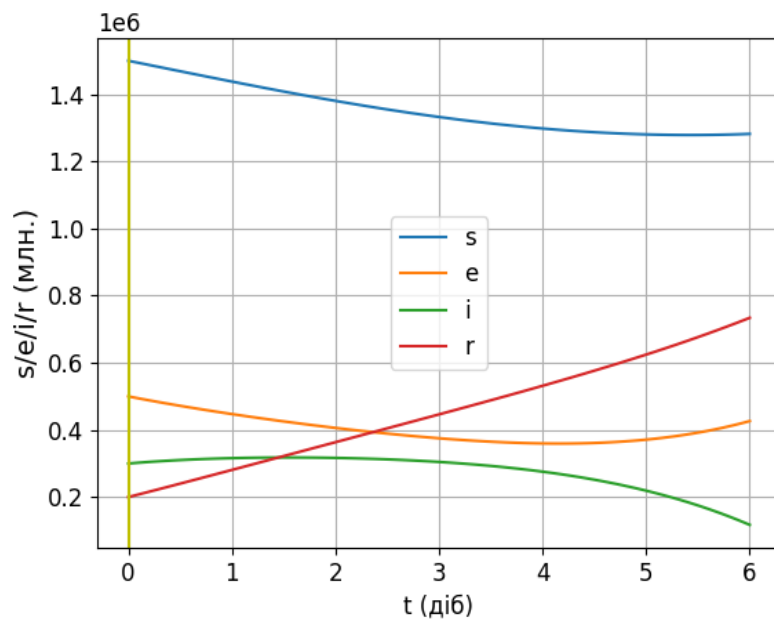


Рис.5. Графіки функцій $s(t)$, $e(t)$, $i(t)$, $r(t)$

При обраних параметрах моделі число хворих i спочатку незначно зростає, але потім спадає, натомість число одужалих r відповідно росте. Зрозумілим чином кількість сприйнятливих поступово зменшується, бо відбуваються переходи між групами e , i , r .

У [2] було проведено розрахунки для моделі (1.6) та отримано наступні результати для груп a_d та i

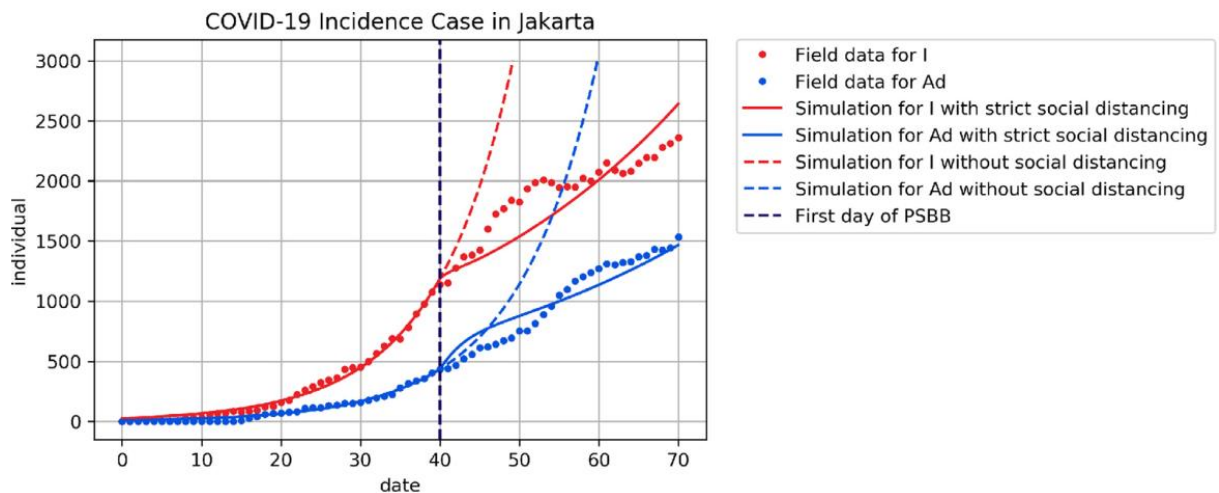


Рис.6. Порівняння даних про захворюваність COVID-19 у Джакарті 3 березня – 10 травня 2020 р. (крапки) із моделюванням груп a_d та i з моделі системи (1.6), ігноруючи природні народжуваність, смертність та швидкість вибуття з групи одужалих через можливість того, що тимчасовий імунітет закінчиться (штрихові лінії – моделювання за ігнорування соціального дистанціювання, безперервні – з врахуванням соціального дистанціювання)

Як бачимо, крива обчислення для випадку врахування соціального дистанціювання є більш наближеною до реальних даних, ніж за його ігнорування. Це очевидно, бо в цей період часу в Джакарті діяли коронавірусні обмеження. Тобто модель (1.6) надає доволі точні результати.

Слід зазначити, що тут зростання числа інфікованих не досягло свого піку, в той час як для нашого випадку хвиля вже пішла на спад.

Для проведення аналізу чутливості розв'язків відносно параметрів системи, тобто щоб зрозуміти, збурення яких параметрів впливає на криві розв'язків найбільше, побудуємо наступну таблицю.

Таблиця 3. Зміна значень параметрів на $\pm 10\%$

Параметр	Значення	Значення +10%	Значення -10%
β	$1.44 \cdot 10^{-7}$	$1.584 \cdot 10^{-7}$	$1.296 \cdot 10^{-7}$
ψ	0.25	0.275	0.225
γ	0.27	0.297	0.243
ϕ	0.06	0.066	0.054
δ	1/90	0.012	0.01

Тепер почергово змінюватимемо один з параметрів, при цьому фіксуємо інші, і побудуємо нові графіки (див. Рис.7(а, б), Додаток В).

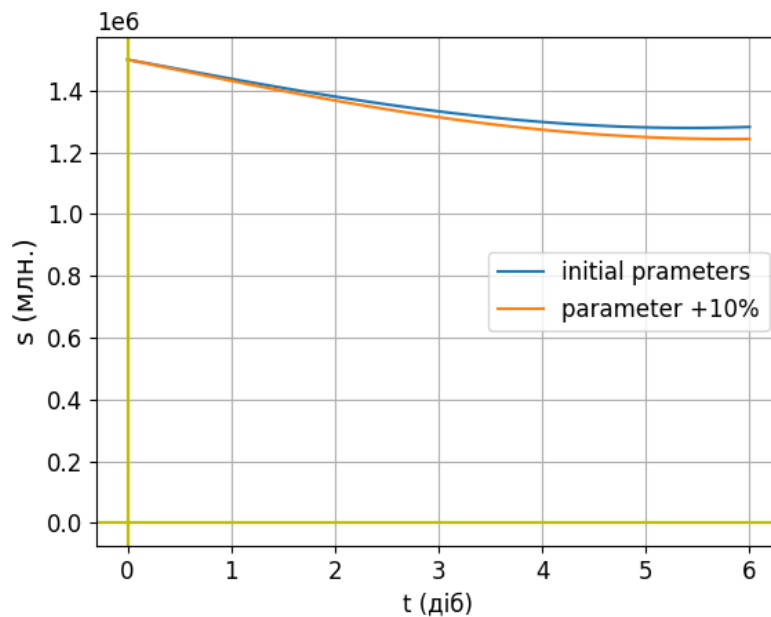


Рис.7(а). Поведінка функції $s(t)$ при збільшенні параметру β на 10% від початкового значення

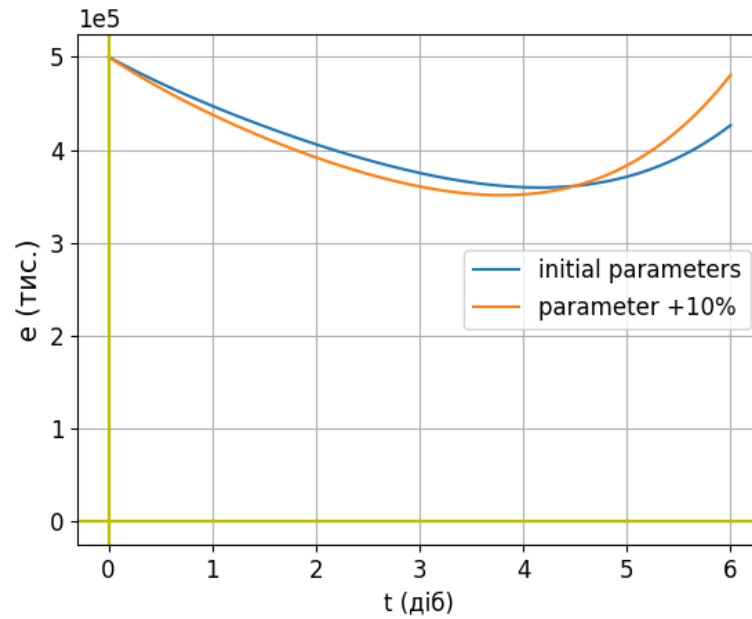
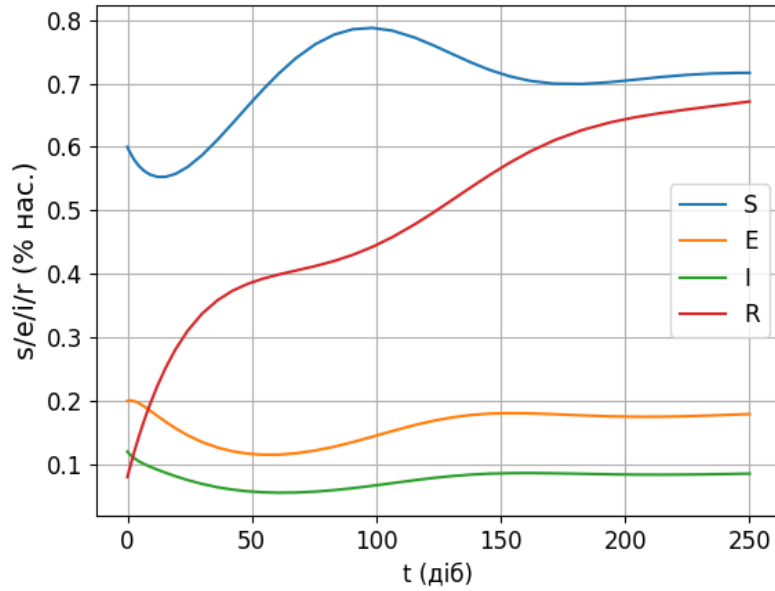


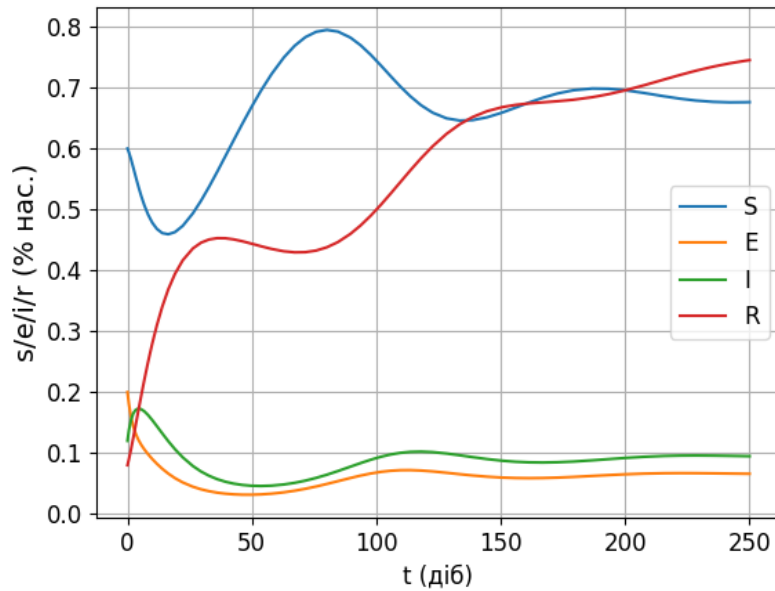
Рис.7(б). Поведінка функції $e(t)$ при збільшенні параметру ψ на 10% від початкового значення

Порівнявши поведінку кривих робимо висновки про те, що найбільше відхилення кривих спостерігається при зміні параметру ψ , тобто швидкості переходу індивідів від групи експонованих до групи інфікованих. Відносно усіх інших параметрів розв'язки є відносно стійкими.

Для пандемій цікавим є дослідження їх перебігу у довготривалій перспективі. Для моделі SEIR ми побудували такі графіки і розглянули кілька сценаріїв.



а

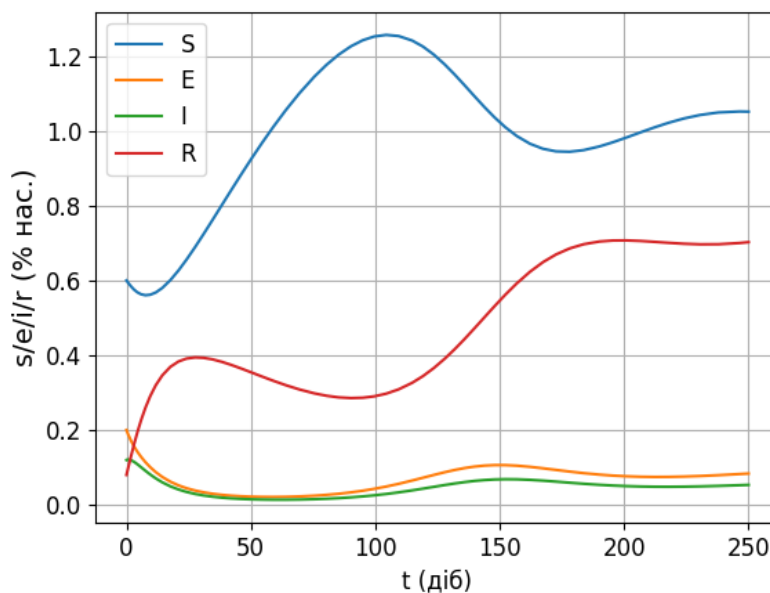


б

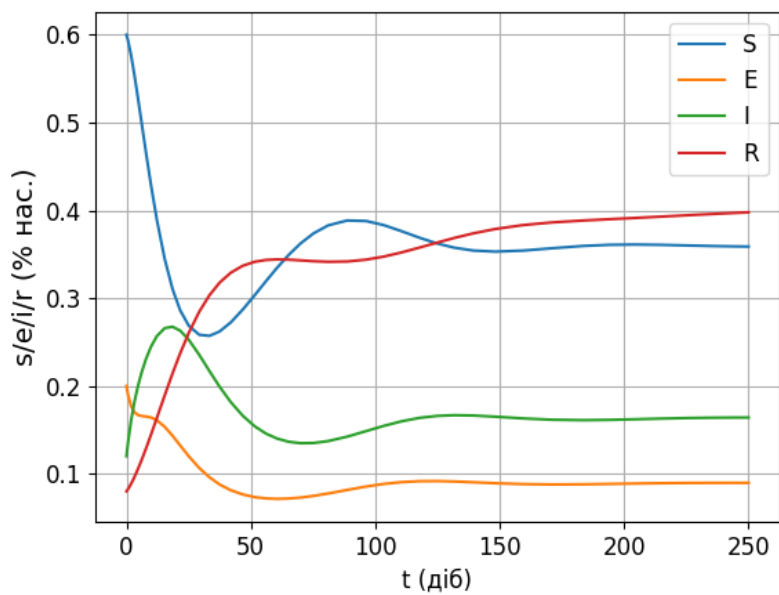
Рис. 8. Перебіг пандемії при меншому темпі (а) захворюваності ψ та більшому (б)

Перший випадок – коли виникають нові спалахи, тобто зберігається хвильова динаміка пандемії. Як видно на Рис.8, при більш швидкому темпі захворюваності маємо спалах на початку, а наступні хвилі теж мають більшу амплітуду, ніж при меншій швидкості. Тобто в такому випадку все залежить від самого вірусу: який в нього період розмноження в організмі, від його трансмісивності. Це параметр, на який ми не можемо впливати.

Далі при коливанні параметру швидкості одужування отримали наступні графіки:



а



б

Рис.9. Перебіг пандемії при високій швидкості одужування γ (а) та при низькій (б)

На швидкість одужування впливають такі фактори як наявність хороших лікарень та місць в них, доступність апаратів ШВЛ, медикаментів тощо. Тобто це ті фактори, які ми можемо контролювати. При цьому як бачимо на Рис.9., при низькій швидкості одужуваності пандемія поступово вирівнюється, тобто ми маємо постійну кількість хворих та одужалих.

ВИСНОВКИ

У даній роботі ми зробили огляд декількох моделей математичної епідеміології. Робимо висновок про те, що модель SEIRS найадекватніша, дає змогу робити доволі точні передбачення. Ускладнення цієї моделі новими контактними групами та параметрами дають змогу визначати вплив різних чинників на хід епідемії.

Було розглянуто метод диференціального перетворення, який має високу точність та малий час розрахунків. Він фактично зводить задачу пошуку розв'язку ЗДР до розв'язування рекурентних рівнянь.

За допомогою методу диференціальних перетворень було отримано розв'язок для системи SEIR у вигляді поліномів 4-го порядку, що дозволяє досягти обраної нами точності у 2%. Також, було проведено аналіз чутливості системи до змін параметрів, внаслідок чого було виявлено, що система є найбільш чутливою до зміни параметру (швидкість переходу з групи експонованих до групи інфікованих). Відносно інших параметрів система є доволі стійкою.

На хід пандемії впливають різні чинники, на деякі з них ми можемо впливати, на деякі - ні. Подальше моделювання показало дві ситуації, коли пандемія повністю не зупинена, але може бути більш-менш контрольована різними заходами.

Необхідно зазначити, що для моделювання потрібні більш точні значення параметрів для конкретної країни.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ЛІТЕРАТУРИ

1. Н.М. Кізілова, В.В. Костецька Математичне моделювання динаміки пандемії COVID-19. *Вісник Харківського національного університету серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2020. 47.
2. Dipo Aldila, Sarbaz H.A.Khoshnaw, Egi Safitri, Yusril Rais Anwar, Aanisah R.Q.Bakry, Brenda M.Samiadji, Demas A.Anugerah, M. Farhan Alfarizi GH, Indri D.Ayulani, Sheryl N.Salim. A mathematical study on the spread of COVID-19 considering social distancing and rapid assessment: The case of Jakarta, Indonesia. *[Chaos, Solitons & Fractals](#)*. 2020. 139
3. Achaiah NC, Subbarajasetty SB, Shetty RM. R0 and Re of COVID-19: Can We Predict When the Pandemic Outbreak will be Contained? *Crit Care Med*. 2020. 24(11). C. 1125–1127.
4. J.K. Zhou, Differential Transformation and its Applications for Electrical Circuits. *Huazhong University Press, Wuhan, China*. 1986 (in Chinese)
5. Ayaz, F. (2004) Applications of Differential Transform Method to Differential-Algebraic Equations. *Applied Mathematics and Computation*, 152. C. 649-657. [http://dx.doi.org/10.1016/S0096-3003\(03\)00581-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0096-3003(03)00581-2)
6. S.V. Kanth and K. Aruna. Two-dimensional differential transform method for solving linear and non-linear Schrodinger equations. *Chaos Solitons and Fractals*. 2009. 41(5). C. 2277-2281.
7. A. Arikoglu and I. Ozkol, Solution of fractional differential equations by using differential transform method. *Chaos Solitons and Fractals*. 34(2007). C. 1473-1481.
8. Khan, Y., Svoboda, Z. & Šmarda, Z. Solving certain classes of Lane-Emden type equations using the differential transformation method. *Adv Differ Equ*. 2012. 174 (2012). <https://doi.org/10.1186/1687-1847-2012-174>

9. F.s. Akinboro, S. Alao, F. Oyedigba Akinpelu. Numerical Solution of SIR Model using Differential Transformation Method and Variational Iteration Method. [*General Mathematics Notes*](#). 2014. 22(2)

Додаток А

Код програми в Python

```
#initial conditions
beta=1.44*10**(-7)
psi=0.25
gamma=0.27
phi=0.06
delta=1/90
lmbd=10467629/(65*365)
alpha=1/(65*365)
S_0=1500000
I_0=300000
R_0=200000
E_0=500000

S = []
I = []
R = []
E = []
S.append(S_0)
I.append(I_0)
R.append(R_0)
E.append(E_0)

# func
def func(k):
    sum=0
```

```

m=0
while m < k+1:
    sum = sum + S[m]*I[k-m]
    m = m+1
return sum

# recurrencial formulas
for k in range (0, 10):
    S1=1/(k+1)*(lmbd-beta*func(k)+delta*R[k]-alpha*S[k])
    E1=1/(k+1)*(beta*func(k)-(alpha+psi)*E[k])
    I1=1/(k+1)*(psi*E[k]-gamma*I[k]-(alpha+phi)*I[k])
    R1=1/(k+1)*(gamma*I[k]-(alpha+delta)*R[k])
    S.append(S1)
    E.append(E1)
    I.append(I1)
    R.append(R1)

print("S: ", S)
print("E: ", E)
print("I: ", I)
print("R: ", R)

```

Додаток В

Графіки поведінки функцій при коливанні параметрів

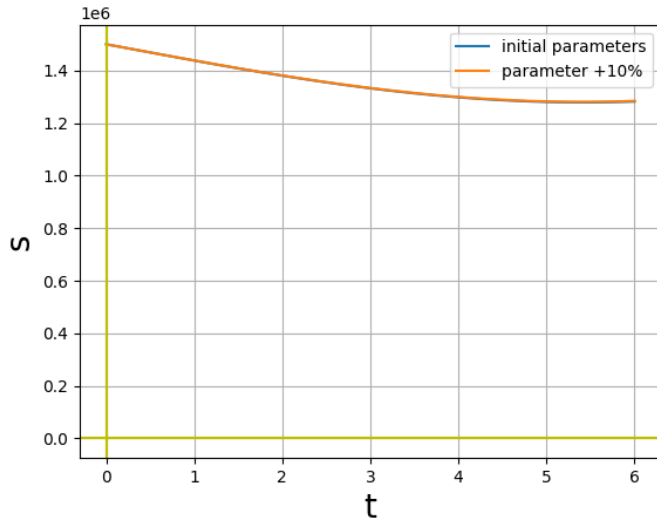


Рис.7 (в). Поведінка функції $s(t)$ при збільшенні параметру δ на 10% від початкового значення

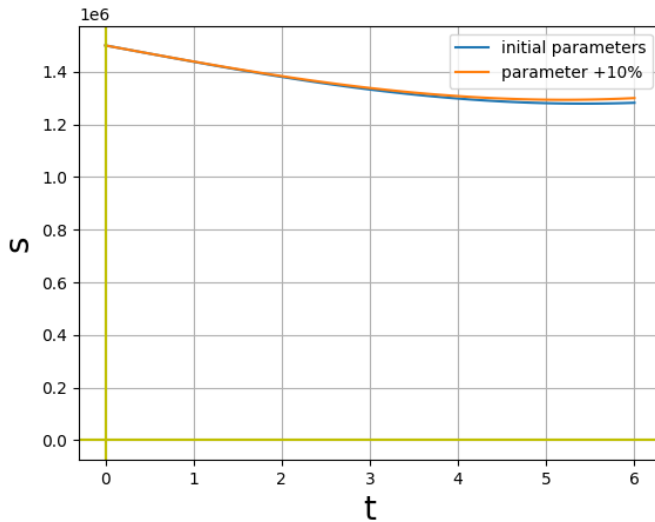


Рис.7(г). Поведінка функції $s(t)$ при збільшенні параметру γ на 10% від початкового значення

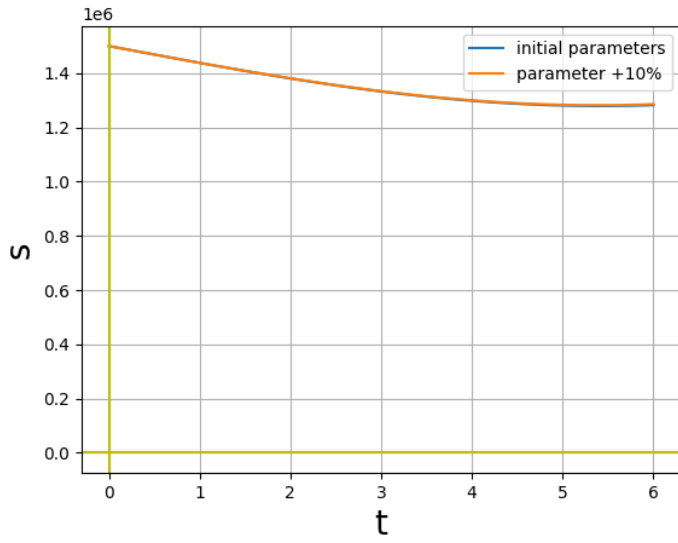


Рис.7(д). Поведінка функції $s(t)$ при збільшенні параметру ϕ на 10% від початкового значення

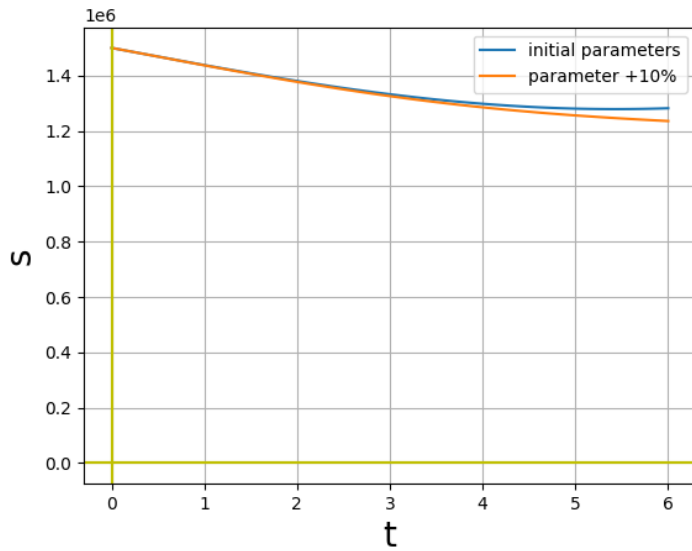


Рис.7(е). Поведінка функції $s(t)$ при збільшенні параметру ψ на 10% від початкового значення